## التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$U_0=-\frac{3}{4} \text{ و } U_{n+1}=\frac{2U_n-1}{2U_n+5}$$

1- بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}): -1<U_n<-\frac{1}{2}$

2- نضع $V_n=\frac{2U_n+1}{U_n+1}$

أ- بين أن $(V_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أحسب $V_n$ بدلالة $n$

و استنتج $U_n$ بدلالة $n$

ب- أحسب بدلالة $n$ كل من $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}V_k$

و $P_n=V_0V_1.....V_n$

## التمرين الثاني

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$U_0=1 \text{ و } U_{n+1}=\frac{6U_n-2}{2U_n+1}$$

1- بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}): \frac{1}{2}<U_n<2$

2- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3- نضع $V_n=\frac{2U_n-1}{U_n-2}$

أ- بين أن $(V_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية

ب- بين أن $U_n=\frac{2^n+(2\times5^n)}{2^{n+1}+5^n}$

## التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

1) أ- أدرس رتابة الدالة $f$ على المجال $I=[1,2]$

ب- استنتج أن $f(I)\subset I$

2) لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية و بحيث :

$$U_0=1 \text{ و } U_{n+1}=f(U_n)$$

أ- أحسب $U_1$ و بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1\leq U<2$

ب- بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية

ج- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ |U_{n+1}-\sqrt{3}|\leq\frac{1}{2}|U_n-\sqrt{3}|$

د- بين بالترجع أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ |U_n-\sqrt{3}|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

## التمرين الرابع

$(I)$ نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1} \text{ و نضع } I=[0,1]$$

1) بين أن $f(I)\subset I$

2) بين أن $f(x)\geq x \quad (\forall x\in I)$

$(II)$ لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية بحيث :

$$U_0=\frac{1}{2} \text{ و } U_{n+1}=f(U_n)$$

1) بين أن $0<U_n<1 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

2) بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية

3) أ- بين أن $|U_{n+1}-1|\leq\frac{4}{5}|U_n-1| \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

ب- بين أن $|U_n-1|\leq\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

## التمرين الخامس

$(U_n)_n\ ;\ (V_n)_n$ متتاليتان معرفتان بما يلي :

$$\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\frac{3U_n+5V_n}{8}\end{cases} \text{ و } \begin{cases}V_0=2\\ V_{n+1}=\frac{U_n+5V_n}{6}\end{cases}$$

1) أحسب $U_1\ ;\ V_1$

2) نضع $W_n=V_n-U_n$

أ- بين أن $(W_n)_n$ متتالية هندسية

ب- أحسب الجمع $S_n=W_0+W_1+.....+W_{n-1}$

3) أ- تحقق أن $U_n-U_{n-1}=\frac{5}{8}W_{n-1} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- استنتج أن $U_n=U_0+\frac{5}{8}S_n$

بين أن $\left|U_n-\frac{34}{19}\right|\leq\left(\frac{5}{24}\right)^n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$

## التمرين السادس

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بما يلي :

$$U_0=0 \text{ و } U_{n+1}=\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{1+U_n}\right)^2-1$$

1) بين أن $0\leq U_n<3 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

2) أ- بين أن $U_{n+1}-U_n=-\frac{3}{4}\left[\left(\sqrt{1+U_n}-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{16}{9}\right]$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) نضع $V_n=\sqrt{1+U_n}-2$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها

ب- أحسب $U_n$ بدلالة $n$

ج- أحسب الجمع $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}\sqrt{1+U_k}$